3 Espacios vectoriales

3.1 Espacios vectoriales[1]

Sea V un conjunto en el que se han definido dos operaciones:

- Suma de vectores
- Producto de un vector por un escalar

Se dice que V tiene estructura de espacio vectorial sobre R si se verifica para todo u,v,w ∈V y para todo λ,μ ∈R las siguientes propiedades:

1. u+v∈V	La suma es cerrada
2. u+v=v+u	Propiedad conmutativa
3. u+(v+w)=(u+v)+w	Propiedad asociativa
4. ∃ o∈V,∀ u∈V,u+o=u	Elemento neutro de la suma
5. ∀ u∈V,∃-u∈V,u+(-v)=o	Elemento inverso de la suma
6. λu∈V	Multiplicación por un escalar es cerrada
7. λ (u+v)=λu+λv	Propiedad distributiva
8. (λ+μ) u=λu+μv	Propiedad distributiva
9. λ(μu)=(λμ) u	Propiedad asociativa
10. 1 u=u	Identidad escalar

Ejemplo 1. 1. Puede demostrase que definidos en $\mathbb{R}^2$ los vectores como pares ordenados de números $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ y las operaciones:

[1] *En adelante los vectores se representarán mediante letras en negrita, así el vector cero se nota mediante* ***o***

- Suma de vectores: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- Producto por un escalar: $\lambda\, \boldsymbol{u} = (\lambda u_1,\ \lambda u_2)$

Dotan a $\mathbb{R}^2$ de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con el vector $\boldsymbol{o} = (0, 0)$ como elemento neutor de la suma y $(-u_1, -u_2)$ como elemento inverso.

2. El conjunto de las matrices de tamaño mxn, con las operaciones habituales de suma de matrices y producto por un escalar, posee estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3. El conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que n con la suma y multiplicación por un numero real habituales.

4. El conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado n no es un espacio vectorial ya que, por ejemplo, la suma de $x^n + 2x + 1$ y $-x^n + 3x$ da como resultado $5x + 1$ que no es un polinomio de grado n, es decir la suma no es una operación cerrada.

4. El conjunto de las funciones reales continuas en toda la recta real, con las operaciones:

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$
$$(\lambda\, f)(x) = \lambda\big(f(x)\big)$$

♣

3.1.1 Propiedades de la multiplicación por un escalar

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$
2. $\lambda\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$
3. $Si\ \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \implies \boldsymbol{\lambda} = 0$ ó $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$
4. $-(\lambda\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda}(-\boldsymbol{u})$
5. $(\lambda\boldsymbol{u} = \mu\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}) \Longrightarrow \lambda = \mu$
6. $(\lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda v}$ y $\boldsymbol{\lambda} \neq 0) \Longrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$

3.2 Subespacios vectoriales

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V, es un subespacio vectorial de V si W es espacio vectorial con las mismas operaciones de suma y producto por un escalar definidas en V. Para que W pueda ser subespacio de V, las dos operaciones han de ser cerradas en W.
Para concluir que un conjunto es espacio vectorial, hay que comprobar los diez axiomas (3.1). Sin embargo, al ser W un subconjunto de un espacio vectorial V basta con verificar que las dos operaciones son cerradas en W, es decir:

Teorema 1

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es subespacio de V sí, y sólo sí, se satisfacen las dos condiciones:

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W, \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$
2. $\lambda\boldsymbol{u} \in W, \forall \boldsymbol{u} \in W\ y\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración

a) En una dirección la demostración es inmediata, si W es subespacio de V, entonces W es un espacio vectorial, y deben ser cerradas la suma y la multiplicación por un escalar.

b) Para demostrar el teorema en la otra dirección, supongamos que la suma y la multiplicación por un escalar son cerradas en W. Nótese que si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} \in W$, también pertenecen a V por lo que los axiomas, 2, 3, 7, 8, 9 y 10 de espacio vectorial se cumplen automáticamente. Además como la suma y la multiplicación por un escalar son cerradas en W:

$\forall\, \boldsymbol{w} \in W$ y con $\lambda = 0$, se tiene que:

$$\lambda \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$$

$$(-1)\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w}$$

ambos pertenecen a W, luego se satisfacen los axiomas 4 y 5.

Si W es un subespacio del espacio vectorial V, ambos deben tener el mismo vector $\boldsymbol{o}$**.** De hecho el subespacio vectorial más pequeño de un espacio vectorial, es aquél que posee como único vector el vector nulo y se denomina como ***subespacio cero***: $W = \{\boldsymbol{o}\}$**.**

Otro subespacio vectorial de V es el propio V. Todo espacio vectorial contiene estos dos subespacios, denominados **triviales**. Los subespacios distintos de estos dos se llaman **subespacios propios o no triviales**.

♣

Ejemplo 2. 1. El conjunto de matrices simétricas de orden 2, es subespacio del espacio vectorial de las matrices de orden 2, con las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación por un escalar.

La suma de matrices simétricas, produce una matriz simétrica y el producto por un escalar también produce una matriz simétrica ya que $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_2^s$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$$

2. El conjunto de matrices singulares de orden 2 no es subespacio del espacio vectorial de las matrices de orden 2, porque, por ejemplo, la suma de dos matrices:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ singulares , da como resultado:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es no singular.

♣

3.2.1 Intersección de subespacios vectoriales

Si V y W son subespacios del espacio vectorial U, la intersección de V y W (denotada por $V \cap W$) es también un subespacio de U.

Demostración

a) Por ser V y W subespacios de U, ambos contienen el vector cero, luego $V \cap W$ es no vacío.

b) Para ver que la suma es cerrada en $V \cap W$, sean $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ dos vectores de $V \cap W$. Al ser V y W subespacios de U, la suma es cerrada en ambos. Por tanto, como $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ están en V, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$. Análogamente, como$\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ están en W, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W$. Lo que implica que $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V \cap W$, de modo que en $V \cap W$ la suma es cerrada.

c) De forma análoga se demuestra que la multiplicación por un escalar es cerrada en $V \cap W$.

3.2.2 Subespacios de $\mathbb{R}^n$

¿Cuál de estos conjuntos es subespacio de $\mathbb{R}^2$?

a) El conjunto de los puntos de la recta $x + 2y = 0$

b) El conjunto de puntos de la recta $x + 2y = 1$

Solución

a) Un punto de la recta $x + 2y = 0$ es de la forma $(-2t, t)$, donde t es cualquier número real.

Sean $\boldsymbol{v_1} = (-2t_1, t_1)$ y $\boldsymbol{v_2} = (-2t_2, t_2)$, dos puntos cualesquiera de la recta. Entonces:

$$\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = (-2t_1, t_1) + (-2t_2, t_2) = (-2(t_1 + t_2), t_1 + t_2) = (-2t_3, t_3)$$

donde $t_3 = t_1 + t_2$. Así pues, $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$ está en la recta y, por tanto, la suma es cerrada. De forma análoga se demuestra que la multiplicación por un escalar es cerrada en este conjunto y, por tanto es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

b) Este subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no es subespacio porque no contiene al vector cero.

Un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ es subespacio sí y sólo sí, está formado por alguno de estos conjuntos de puntos:

a) El punto $(0, 0)$ únicamente.

b) Una recta que pasa por el origen

c) Todo $\mathbb{R}^2$.

Otro ejemplo

Probar que el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por todos los puntos de la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Solución

Este subconjunto no es subespacio porque los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ pertenecen a él, mientras que su suma $(1, 1)$ no pertenece, por tanto, la suma no es cerrada. También podría llegarse a la misma conclusión, al denotar que el vector cero (0, 0) no pertenece a él.

3.3 Sistemas generadores

Definición 1

Se dice que los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ de un espacio vectorial V **generan** V si todo vector de V se puede escribir como combinación lineal de los mismos. Es decir,

$$\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2, + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$$

Ejemplos

a) El conjunto $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ porque todo vector $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores de S, de la forma:

$$\boldsymbol{u} = u_1(1,0,0) + u_2(0,1,0) + u_3(0,0,1) = (u_1, u_2, u_3)$$

b) El conjunto $S = \{1, x, x^2\}$ genera P_2[2] porque cualquier polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ de P_2 se puede expresar como:

$$p(x) = a(1) + b(x) + c(x^2)$$

Los sistemas de generadores de los ejemplos anteriores se denominan sistemas canónicos de $\mathbb{R}^3$ y P_2 respectivamente.

Ejemplo 3.

Probar que el conjunto $S = \{(1, 2, 3), (0\ 1, 2), (-2, 0, 1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Solución

Sea $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, necesitamos encontrar escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que:

$$(u_1, u_2, u_3) = \lambda_1\,(1, 2, 3) + \lambda_2\,(0, 1, 2) + \lambda_3\,(-2, 0, 1) = (\lambda_1 - 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)$$

Igualando componente a componente, obtenemos un sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = u_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = u_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = u_3 \end{cases}$$

Dado que la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo:

[2] *P_2 es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que 2*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

El sistema tiene solución única, por lo tanto, todo vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de S, es decir, S genera $\mathbb{R}^3$.

o generado por un conjunto de vectores.

Sea $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k, k$ vectores de un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$, **es decir:**

$$gen\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\} = \{\boldsymbol{v}: \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2, + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k\}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son escalares arbitrarios.

A este conjunto también se le denomina como *envolvente lineal* y se escribe $lin\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$

Demostración

Para probar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ es un subespacio de V bastará ver que las dos operaciones son cerradas.

Dados dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in lin(S)$ tales que:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{k}} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

$$\boldsymbol{w} = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + \mu_k \boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \boldsymbol{v}_j$$

con λ_i, μ_j escalares. Entonces:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = (\lambda_1 + \mu_1)\boldsymbol{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\boldsymbol{v}_2 + \dots + (\lambda_k + \mu_k)\boldsymbol{v}_k$$

y

$$\alpha \boldsymbol{u} = (\alpha\lambda_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha\lambda_2)\boldsymbol{v}_2 + \dots + (\alpha\lambda_k)\boldsymbol{v}_k$$

lo que implica que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ y $\alpha \boldsymbol{u}$ también pertenecen a $lin(S)$, ya que se pueden escribir como combinaciones lineales de los vectores de S. Por tanto $lin(S)$ es subespacio vectorial de V.

Teorema 2

Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces $S = gen\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un subespacio de V

Ejemplo 4. *Ecuación del espacio vectorial generado por dos vectores en* $\mathbb{R}^3$

Sean $\boldsymbol{v_1} = (2, -1, 4)$ y $\boldsymbol{v}_2 = (4, 1, 6)$.

Entonces $H = gen\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v}_2\} = \{\boldsymbol{v}: \boldsymbol{v} = \lambda_1(2, -1, 4) + \lambda_2(4, 1, 6)\}$

¿Qué forma tiene H?. Si $\boldsymbol{v} = (x, y, z) \in H$, entonces se tiene:

$$x = 2\lambda_1 + 4\lambda_2$$
$$y = -\lambda_1 + \lambda_2$$
$$z = 4\lambda_1 + 6\lambda_2$$

Si se piensa que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones se pueden ver como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas (λ_1, λ_2). Este sistema se resuelve en la forma usual:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x+2y \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & \frac{x+2y}{6} \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{6} - \frac{2y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{x}{6} + \frac{y}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3+z} \end{array}\right)$$

El sistema tiene una solución únicamente si $\frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3} + z = 0 \Longrightarrow 5x - 2y - 3z = 0$, que es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Este ejemplo se puede generalizar para probar que el espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos es un plano que pasa por el origen.

3.3.2 Dependencia e independencia lineal

Dado cualquier conjunto de vectores $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ de un espacio vectorial V, la ecuación vectorial:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$$

tiene siempre la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Ahora bien, muchas veces existen otras soluciones no triviales. Esta característica se describe diciendo que el conjunto S es **linealmente dependiente**. Si hubiera existido solamente la solución trivial diríamos que el conjunto S es **linealmente independiente**.

Definición 2

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ de un espacio vectorial V es **linealmente independiente** si la ecuación vectorial:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$$

tiene sólo la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Si hay otras soluciones no triviales, se dice que S es **linealmente dependiente**.

Análisis de la independencia lineal

Sea $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Para saber si S es linealmente independiente hay que seguir los siguientes pasos:

1. Reescribir la ecuación vectorial $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$, como un sistema lineal homogéneo en las variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.
2. Averiguar si el sistema tiene solución única mediante eliminación gaussiana.
3. Si tiene solución única (la trivial con $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$), S es linealmente independiente. Si el sistema admite soluciones no triviales, S es linealmente dependiente.

Ejemplo 5. Determinar si es linealmente independiente en P_2 el conjunto formado por los vectores:

$$S = \{1 + x - 2x^2, 2 + 5x - x^2, x + x^2\}$$

Solución

Desarrollando la ecuación vectorial $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{o}$, se tiene:

$$\lambda_1(1 + x - 2x^2) + \lambda_2(2 + 5x - x^2) + \lambda_3(x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2) + (\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3)x + (-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

Igualando los coeficientes de los polinomios de ambos lados de la ecuación, se llega al sistema lineal:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Su matriz ampliada se reduce por eliminación gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto implica que el sistema tiene infinitas soluciones. Por tanto admite soluciones no triviales, luego el conjunto S es linealmente dependiente.

Una solución no trivial es:

$$\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = -1,\ \ \lambda_3 = 3$$

que permite escribir la combinación lineal no trivial:

$$2(1 + x - 2x^2) - (2 + 5x - x^2) + 3(x + x^2) = \boldsymbol{o}$$

Ejemplo 6. Determinar si es linealmente independiente en $\mathcal{M}_{2,2}$ el conjunto de vectores:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

De la ecuación vectorial:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{o}$$

resulta:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que produce el sistema de ecuaciones lineales en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Por eliminación gaussiana, su matriz ampliada se reduce así:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así pues, el sistema tiene sólo la solución trivial de modo que el conjunto S es linealmente independiente.

Teorema 3 Una propiedad de los conjuntos linealmente dependientes.

Un conjunto $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}, k \geq 2$, es linealmente dependiente sí, y sólo sí, al menos uno de sus vectores $\boldsymbol{v}_j$ se puede escribir como combinación lineal de los demás vectores de S.

Demostración

a) Supongamos que S es linealmente dependiente. En tal caso, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$$

Puesto que alguno de los coeficientes ha de ser no nulo, podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$. Entonces, despejando $\boldsymbol{v}_1$ como combinación lineal de los demás vectores, resulta:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 = -\lambda_2 \boldsymbol{v}_2 - \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 \dots - \lambda_k \boldsymbol{v}_k$$

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \boldsymbol{v}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \boldsymbol{v}_3 \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \boldsymbol{v}_k$$

b) Recíprocamente, supongamos que el vector $\boldsymbol{v}_1$ de S es combinación lineal de los demás, o sea:

$$\boldsymbol{v}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k$$

Entonces la ecuación:

$$-\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$$

tiene al menos un coeficiente, -1, no nulo. Concluimos que S es linealmente dependiente.

Corolario

Los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ del espacio vectorial V son linealmente dependientes sí, y sólo sí, uno de ellos es múltiplo escalar del otro.

El vector cero es múltiplo escalar de cualquier otro vector del espacio vectorial.

Teorema 4 Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es siempre linealmente dependiente si $n > m$.

Demostración

Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^m$ e intentemos encontrar constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, no todas cero tales que:

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

Sean $\boldsymbol{v}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \boldsymbol{v}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, \boldsymbol{v}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$. Entonces la ecuación anterior se convierte en:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Pero este sistema tiene un número finito de soluciones si $n \geq m$. De esta forma, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ no todos cero que satisfacen el sistema y, por lo tanto, los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ son linealmente dependientes.

Corolario

Un conjunto de vectores linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ contiene a lo sumo n vectores.

Teorema 5 Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}$, $n+1$ vectores que están en un espacio vectorial V. Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ genera a V, entonces $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}$ también genera a V. Es decir, si se agregan uno o más vectores a un conjunto generador, se obtiene otro conjunto generador.

Teorema 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces las columnas de A consideradas como vectores son linealmente dependientes si y sólo si el sistema, que se puede escribir como $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales. Donde $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

Ejemplo 7. Considérese el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Haciendo una reducción de filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

El último sistema es:

$$\begin{cases} x_1 - 9x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Se ve que este sistema tiene un número infinito de soluciones, que se escriben como combinación lineal de los vectores columna, para ello basta tomar como variables libres: $x_3 = \lambda$ y $x_4 = \mu$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 9\lambda - 6\mu \\ -4\lambda + 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones linealmente independientes para el sistema dado porque ninguno de los dos es múltiplo del otro. Como λ y μ son números reales arbitrarios, se ve que el conjunto de soluciones al sistema es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por estos dos vectores solución linealmente independientes.

Teorema 7 Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n, n$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de n x n cuyas columnas son $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Entonces $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ es la solución trivial $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$

Teorema 8 Sea A una matriz de n x n. Entonces det $(A) \neq 0$ si y sólo si, las columnas de A son linealmente independientes.

Teorema 9 Cualquier conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente, genera $\mathbb{R}^n$

Demostración

Sean $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{v}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$ vectores linealmente independientes y sea $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Debemos demostrar qe existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que:

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Desarrollando la ecuación vectorial anterior obtenemos el sistema de n ecuaciones con n incógnitas ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$):

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n = x_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n = x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{nn}\lambda_n = x_n \end{cases}$$

Que se puede escribir como $A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{v}$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Pero det $(A) \neq 0$ ya que las columnas de A son linealmente independientes. De manera que el sistema tiene una solución única $\boldsymbol{\lambda}$ como queríamos demostrar.

Observación. Esta demostración no sólo muestra que $\boldsymbol{v}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores independientes $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, sino también que esto se puede lograr *de una sola manera* (ya que el vector solución $\boldsymbol{\lambda}$ es único).

Ejemplo 8. Los vectores $(2, -1, 4), (1, 0, 2)$ y $(3, -1, 5)$ generan $\mathbb{R}^3$ porque $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y, por lo tanto, son independientes.

Ejemplo 9. En $\mathcal{M}_{2,3}$, sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar si A_1, A_2, A_3 son linealmente independientes o dependientes.

Solución

Sopongamos que $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_2 & 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Esto nos proporciona un sistema homogéneo de seis ecuaciones con tres incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en el cual resulta sencillo verificar que la única solución es $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, lo que demuestra que las tres matrices son linealmente independientes.

Ejemplo 10. En P_3 determinar si los polinomios $1, x, x^2$ y x^3 son linealmente dependientes o independientes.

Solución

Supongamos que $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 = 0$. Esto debe cumplirse para todo número real x. En particular, si $x = 0$, se obtiene $c_1 = 0$. Entonces, dando sucesivamente a x los valores $x = 1, -1, 2$ se obtiene:

$$c_2 + c_3 + c_4 = 0$$
$$-c_2 + c_3 - c_4 = 0$$
$$2c_2 + 4c_3 + 8c_4 = 0$$

El determinante de este sistema homogéneo es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

De manera que el sistema tiene una solución única $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y los cuatro polinomios son linealmente independientes.

3.4 Bases y dimensión de un espacio vectorial

3.4.1 Base de un espacio vectorial

Definición 3 Un conjunto de vectores $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ de un espacio vectorial V es una base de V si se cumple:

1. S genera V
2. S es linealmente independiente

Esta definición no asegura que todo espacio vectorial V tenga una base formada por un número finito de vectores. Si un espacio vectorial V admite una base finita, se dice que V es de **dimensión finita**. En el caso contrario, se dice que V es de **dimensión infinita**.

El espacio vectorial P de todos los polinomios y el espacio vectorial $C(-\infty, \infty)$ de las funciones reales continuas son espacios de dimensión infinita. El espacio $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión 3.

Ejemplo 11. Probar que el espacio vectorial P_3 admite como base el conjunto $S = \{1, x, x^2, x^3\}$

Solución

Es evidente que S genera P_3, porque la envolvente lineal de S contiene todos los polinimios de la forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \text{ donde } a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ son reales}$$

Para verificar la independencia lineal de S, hay que recordar que en P_3 el vector cero es el polinomio dado por $\mathbf{0}(x) = 0, \forall x$. Así pues el criterio de independencia lineal da la ecuación:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \mathbf{0}(x) = 0, \forall x$$

De este polinomio de tercer grado se dice que es idénticamente nulo, es decir, que todos sus coeficientes son cero $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Por tanto S es linealmente independiente y, como consecuencia, es una base de P_3, que se denomina ***base canónica***.

Teorema 10

Si $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, cada vector de V se puede escribir como una, y sólo una, forma como combinación lineal de los vectores de S.

Demostración

Como S genera V, cualquier vector $\boldsymbol{u} \in V$ se puede expresar como:

$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2, + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n$.

Para probar la unicidad, supongamos que $\boldsymbol{u}$ tiene otra expresión de la forma :

$\boldsymbol{u} = \mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2, + \cdots + \mu_n\boldsymbol{v}_n$.

Restando ambas expresiones resulta:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = (\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{v}_2, + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

Ahora bien, si S es linealmente independiente, la única solución de esta ecuación es la solución trivial:

$$(\lambda_1 - \mu_1) = 0, \ (\lambda_2 - \mu_2) = 0, \ (\lambda_n - \mu_n) = 0$$

Lo cual significa que $\lambda_i = \mu_i, \ \forall i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto $\boldsymbol{u}$ tiene un único desarrollo en términos de la base S dada.

Ejemplo 12.

Sea $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que la ecuación:

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3$$

tiene una única solución en términos de la base $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$

Solución

$(u_1, u_2, u_3) = \alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(0, 1, 2) + \alpha_3(-2, 0, 1) = (\alpha_1 + 2\alpha_3), (2\alpha_1 + \alpha_2), (3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$.

Da lugar, componente a componente al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = u_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = u_2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = u_3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{u}$$

Como la matriz A es invertible, el sistema tiene una única solución, dada por $\boldsymbol{\alpha} = A^{-1}\boldsymbol{u}$. Calculando A^{-1} resulta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo cual implica que:

$$\alpha_1 = -u_1 + 4u_2 - 2u_3$$
$$\alpha_2 = 2u_1 - 7u_2 + 4u_3$$
$$\alpha_3 = -u_1 + 2u_2 - u_3$$

Por ejemplo, el vector $\boldsymbol{u} = (1, 0, 0)$ se puede representar de forma única como combinación lineal de S, como sigue:

$$(1, 0, 0) = -\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$$

3.4.2 Coordenadas y componentes de un vector en una base.

Si el espacio vectorial V admite una base $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ se llaman **coordenadas** de un vector $\boldsymbol{x} \in V$ respecto de la base B, a los únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ para los que:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

Los vectores $\lambda_i \boldsymbol{v}_i$ se llaman **componentes** del vector $\boldsymbol{x}$ respecto de la base B.

La matriz de coordenadas (o vector de coordenadas) de $\boldsymbol{x}$ en la base B es la matriz columna en $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las coordenadas de $\boldsymbol{x}$:

$$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Una ventaja de las coordenadas es que nos permiten representar vectores de un espacio n-dimensional arbitrario con la notación de $\mathbb{R}^n$ como vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 13. Hallar la matriz de coordenadas de $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$ en la base canónica de P_3, $S = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Solución

En primer lugar expresamos $p(x)$ como combinación lineal de los vectores de la base:

$$p(x) = 4(1) + 0(x) + (-2)(x^2) + 3(x^3)$$

Esto quiere decir que la matriz de coordenadas de $p(x)$ en la base S es:

$$[p(x)]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 14. Hallar la matriz de coordenadas de:

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

en la base canónica de $\mathcal{M}_{3,1}$:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

Como X se puede escribir:

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

su matriz de coordenadas en la base S es:

$$[X]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Teorema 11 Si $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, todo conjunto que contenga más de n vectores es linealmente dependiente

Demostración

Sea $S_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ un conjunto de m vectores de V, con $m > n$. Para probar que S_1 es linealmente dependiente, debemos encontrar escalares $k_1, k_2, \dots, k_m$ (no todos cero), tales que:

$$k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{o} \quad (1)$$

Puesto que $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base de V, cada $\boldsymbol{u}_i$ es combinación lineal de los vectores de S, con lo que podemos escribir:

$$\boldsymbol{u}_1 = c_{11}\boldsymbol{v}_1 + c_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{v}_n$$
$$\boldsymbol{u}_2 = c_{12}\boldsymbol{v}_1 + c_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{n2}\boldsymbol{v}_n$$

$$\vdots$$
$$\boldsymbol{u}_m = c_{1m}\boldsymbol{v}_1 + c_{2m}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{nm}\boldsymbol{v}_n$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) y reagrupando términos, obtenemos:

$$d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

donde:

$$d_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}k_j$$

Sin embargo, como, los $\boldsymbol{v}_i$ forman un conjunto linealmente independiente, concluimos que cada $d_i = 0$, con lo que llegamos al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{gathered} c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + \cdots + c_{1m}k_m = 0 \\ c_{21}k_1 + c_{22}k_2 + \cdots + c_{2m}k_m = 0 \\ \vdots \\ c_{n1}k_1 + c_{n2}k_2 + \cdots + c_{nm}k_m = 0 \end{gathered}$$

Pero este sistema lineal homogéneo tiene menos ecuaciones que variables $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, por lo que, como sabemos, debe tener soluciones no triviales. En consecuencia, S_1 es linealmente dependiente.

Teorema 12

Si un espacio vectorial V tiene una base formada por n vectores, toda base de V contiene exactamente n vectores.

Demostración

Sea $S_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ la base de V dada, y sea $S_2 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ otra base de V. Como S_1 es una base y S_2 es linealmente independiente, por el teorema anterior, implica que $m \leq n$. Análogamente $n \leq m$ porque S_1 es linealmente independiente y S_2 es una base. Por tanto $n = m$.

3.4.3 Dimensión de un espacio vectorial

Definición 4

Si un espacio vectorial tiene una base formada por n vectores, se dice que V tiene dimensión n (o que es n-dimensional), y se escribe $\dim(V) = n$. Si V contiene sólo el vector cero, se define como de dimensión cero.

Teorema 13

Criterio para bases de un espacio vectorial de tipo finito. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, un sistema de n vectores $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ es base sí, y sólo sí, se cumple una cualquiera de las condiciones:

1. B es un sistema linealmente independiente
2. B es un sistema generador (es decir, genera V).

Demostración

Si B es independiente es base, pues de lo contrario se podría encontrar una base con más de n vectores. Si B genera V no puede ser dependiente, pues si lo fuese habría una base con menos de n vectores y en consecuencia, B es generador y es independiente, es decir, es base. Los recíprocos son evidentes.

Propiedad. Si V es un espacio vectorial de tipo finito y $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ es un sistema linealmente independiente de vectores de V, siempre es posible encontrar unos vectores $\boldsymbol{v}_{p+1}, \boldsymbol{v}_{p+2}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ de V tales que, siendo $n \geq p$, el sistema $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ sea una base de V.

En efecto, si $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ generase V, sería una base y no se hace necesario añadir ningún vector. Si $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ no genera V, ha de haber en V un vector, al menos, $\boldsymbol{v}_{p+1}$, independiente de ellos; si $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}_{p+1}\}$ genera V, la propiedad está demostrada, y si no lo es, se procede como en el caso anterior. Razonando de esta forma sucesivamente, se consigue una base, puesto que, de lo contrario, el proceso se prolongaría indefinidamente y V no podría ser de tipo finito.

Propiedad. Si $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ es una base del espacio vectorial V y $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r\}$ es un sistema linealmente independiente, se puede asegurar que hay $n-r$ vectores de la base que añadidos a los $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$, constituyen una nueva base.

En efecto, según la propiedad anterior, se puede construir una base a partir de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$, añadiendo, de modo adecuado, vectores independientes de ellos y éstos siempre es posible buscarlos de entre los de la base.

3.5 Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

3.5.1 Espacio de filas y espacio de columnas de una matriz

Sea A una matriz m x n, se define:

1. El espacio de filas de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores fila de A.
2. El espacio de columnas de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna de A.

Recordemos que dos matrices son equivalentes por filas si una puede obtenerse de la otra mediante operaciones elementales por filas.

Teorema 14

Sean A y B matrices m x n. Si A es equivalente por filas a B, el espacio de filas de A es igual al espacio de filas de B.

Demostración

Como las filas de B se obtienen de las de A por operaciones elementales por filas (suma y multiplicación por un escalar), cada uno de los vectores fila de B se puede escribir como combinación lineal de los vectores fila de A. Por tanto los vectores fila de B y por tanto, el subespacio generado por los vectores fila de B, están contenidos en el espacio de filas de A. Pero también es cierto que las filas de A se pueden obtener de las de B mediante operaciones elementales, de modo que cada uno de los espacios de filas es subespacio del otro, lo cual implica que son iguales.

Nota. Según el anterior teorema, el espacio de filas de una matriz no cambian al efectuar operaciones elementales por filas, Sin embargo, las operaciones elementales por filas pueden modificar el espacio de columnas.

Si la matriz B es escalonada por filas, sus vectores fila no nulos forman un conjunto linealmente independiente, por tanto, forman una base del espacio de filas de B y, por el teorema anterior, también del espacio de filas de A, lo que resulta en el siguiente teorema.

Teorema 15

Si A es una matriz equivalente por filas a una matriz B escalonada por filas, los vectores fila no nulos de B forman una base del espacio de filas de A

Ejemplo 15. Hallar una base del espacio de filas de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

Mediante operaciones elementales por filas, reescribimos A como:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por el teorema anterior podemos concluir que los vectores fila de B:

$$\boldsymbol{w}_1 = (1,3,1,3), \qquad \boldsymbol{w}_2 = (0,1,1,0), \qquad \boldsymbol{w}_3 = (0,0,0,1)$$

forman una base del espacio de filas de A.

Para hallar una base del **espacio de columnas** de una matriz A tenemos dos opciones:

1. Como el espacio de columnas de A es el espacio de filas de A^T, basta aplicar el método del ejemplo anterior a la matriz A^T.
2. Aunque las operaciones por filas cambian el espacio de columnas de la matriz, no cambian las relaciones de dependencia entre las columnas.

Consideremos las dos matrices del ejemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas 1, 2 y 3 de B satisfacen la ecuación $\boldsymbol{b}_3 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ y también las correspondientes columnas de A la satisfacen.

Análogamente los vectores columna $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ y $\boldsymbol{b}_4$ de B son linealmente independientes y también lo son las correspondientes columnas de A.

Ejemplo 16. Hallar una base del espacio de columnas de la matriz A del ejemplo anterior.

Solución 1

Tomamos A^T, y la reescribimos, mediante operaciones elementales por filas, en forma escalonada:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \\ \boldsymbol{w}_3 \\ \end{array}$$

Así pues, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ y $\boldsymbol{w}_3$ forman una base del espacio vectorial de filas de la matriz A^T. Eso equivale a decir que los vectores columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

forman una base del espacio de columnas de A.

Solución 2

Es fácil ver que en B los vectores columna 1, 2 y 4 son linealmente independientes, por tanto las correspondientes columnas de A son linealmente independientes, luego una base del espacio de columnas viene dada por los vectores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Nótese que esta base del espacio de columnas es distinta de la obtenida en la solución anterior. Compruébese que ambas generan el mismo subespacio de $\mathbb{R}^5$.

Nota. En la segunda solución la forma escalonada por filas de B indica que las columnas de A forman una base del espacio de columnas. No utilice los vectores columna de B para construir la base.

Teorema 16

El espacio de filas y el espacio de columnas tienen la misma dimensión.

Si A es una matriz de $m \ x \ n$ su espacio de filas y su espacio de columnas tienen la misma dimensión.

3.5.2 Rango de una matriz

La dimensión del espacio de filas (o de columnas) de una matriz A se denomina rango de A y se denota por $rango(A)$.

Ejemplo 17. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

La llevamos a forma escalonada por filas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y vemos que B tiene 3 filas no nulas, por lo que el rango de A es 3.

♣

3.5.3 Núcleo de una matriz

Considérese el sistema lineal homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 17

Si A es una matriz $m \ x \ n$, el conjunto solución del sistema lineal homogéneo

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que se llama **núcleo de $\boldsymbol{A}$** y se denota por $N(A)$. Así pues,

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

La dimensión de $N(A)$ se llama **nulidad de $\boldsymbol{A}$**.

Demostración

Como A es una matriz $m \ x \ n$, $\boldsymbol{x}$ tiene tamaño $n \ x \ 1$, de modo que el conjunto solución es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Este subconjunto es claramente no vacío, ya que $A\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ (es decir el vector nulo de $\mathbb{R}^n$ pertenece a dicho subconjunto).

Para comprobar que es un subespacio, basta ver que la suma y la multiplicación por un escalar son cerradas en él. Sean $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ dos vectores solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, y sea c un escalar. De $A\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{o}$ y $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{o}$, se sigue que:

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$$

$$A(\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_1) = c(A\boldsymbol{x}_1) = c\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$$

Así pues, tanto $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ como $c\boldsymbol{x}_1$ son soluciones de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, lo que permite concluir que el conjunto solución es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 18. Hallar el núcleo de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

El núcleo de A es el conjunto solución del sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Para resolver este sistema, hay que escribir su matriz ampliada $[A \vdots O]$ en forma escalonada reducida por filas. Sin embargo, al tratarse de un sistema homogéneo, la columna de la derecha de la matriz ampliada es nula, y no cambia bajo operaciones elementales por filas. Por tanto, es suficiente hallar la forma escalonada reducida por filas de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \quad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Elegimos $x_2 = s$ y $x_4 = t$ como variables libres para representar las soluciones en forma paramétrica:

$$x_1 = -2s - 3t$$

$$x_3 = -t$$

Eso significa que el espacio de soluciones de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ consta de todos los vectores solución $\boldsymbol{x}$ de la forma:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así pues, el núcleo de A está generado por los vectores:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, estos dos vectores son solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ y cualquier otra solución es combinación lineal de ellos.

Se puede demostrar que cuando se resuelve un sistema homogéneo a partir de la forma escalonada reducida, el sistema generado es siempre linealmente independiente.

En este ejemplo la matriz A tiene 4 columnas, rango 2 (columnas 1 y 3 de la matriz escalonada) y nulidad 2 (columnas 2 y 4 de la matriz escalonada).

Teorema 18 Dimensión del espacio de soluciones de un sistema lineal

Si A es una matriz $m\ x\ n$ de rango r, la dimensión del espacio de soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ es $n - r$, esto es:

$$n = rango(A) + nulidad(A)$$

Demostración. Puesto que A tiene rango r, sabemos que es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida B con r filas no nulas. Sin pérdida de generalidad, suponemos que la esquina $r\ x\ r$ superior izquierda de B es la matriz identidad I_r. Como las filas nulas de B no contribuyen a la solución, las descartamos para quedarnos con una matriz B', de tamaño $r\ x\ n$, donde $B' = [I_r \vdots C]$. La matriz C tiene $n-r$ columnas correspondientes a las variables $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Así pues, el espacio de soluciones de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ viene representado por el sistema:

$$\begin{cases} x_1 & & & & +c_{11}x_{r+1} & +c_{12}x_{r+2} & + & \cdots & +c_{1n-r}x_n & = 0 \\ & x_2 & & & +c_{21}x_{r+1} & +c_{22}x_{r+2} & + & \cdots & +c_{2n-r}x_n & = 0 \\ & & x_3 & & +c_{31}x_{r+1} & +c_{32}x_{r+2} & + & \cdots & +c_{3n-r}x_n & = 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & x_r & +c_{r1}x_{r+1} & +c_{r2}x_{r+2} & + & \cdots & +c_{rn-r}x_n & = 0 \end{cases}$$

Resolviendo en las primeras r variables, expresadas en términos de las $n-r$ últimas, se obtienen $n-r$ vectores de la base del espacio de soluciones. En consecuencia, el espacio de soluciones tiene dimensión $n-r$.

Ejemplo 19. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Denotemos los vectores columna por $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$

a) Calcular el rango y la nulidad de A
b) Hallar un subconjunto de los vectores columna de A que formen base del espacio de columnas de A.
c) Escribir, si es posible, la tercera columna de A como combinación lineal de las dos primeras.

Solución

Sea B la forma escalonada reducida por filas de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B tiene 3 filas no nulas, luego el rango de A es 3. Además A tiene $n = 5$ columnas, de modo que la nulidad de A es $n - rango(A) = 5 - 3 = 2$

Como las columnas 1, 2 y 4 de B son linealmente independientes, las correspondientes columnas de A:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forman una base del espacio de columnas de A.

La tercera columna de B es combinación lineal de las dos primeras: $\boldsymbol{b}_3 = -2\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2$, por tanto, la misma relación es válida para las columnas correspondientes de A:

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Una idea fundamental en álgebra lineal consiste en ver una combinación lineal de vectores como el producto de una matriz y un vector.

Definición 5

Si A es una matriz de m x n, con columnas $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ y si x es un vector de $\mathbb{R}^n$, entonces el **producto de** A **y** $\boldsymbol{x}$, denotado como $A\boldsymbol{x}$, es **la combinación lineal de las columnas de** A **utilizando como coeficientes las coordenadas correspondientes de** $\boldsymbol{x}$**;** es decir,

$$A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \ x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

Observa que $A\boldsymbol{x}$ está definido solamente si el número de columnas de A es igual al número de coordenadas de $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ya hemos visto cómo escribir un sistema de ecuaciones lineales como una ecuación vectorial que implica una combinación lineal de vectores. Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Es equivalente a:

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

la combinación lineal en el lado izquierdo es una matriz por un vector, de manera que (2) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

La ecuación (3) tiene la forma $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Tal ecuación se llama **ecuación matricial**, para distinguirla de una ecuación vectorial como la que se muestra en (2).
Observa cómo la matriz en (3) es justamente la matriz de coeficientes del sistema (1). Cálculos similares indican que cualquier sistema de ecuaciones lineales, o cualquier ecuación vectorial como (2), se puede escribir como una ecuación matricial equivalente en la forma $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Teorema 19

Si A es una matriz de m x n, con columnas $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ y si $\boldsymbol{b}$ es un vector de $\mathbb{R}^m$, la ecuación matricial

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (4)$$

tiene el mismo conjunto solución que la ecuación vectorial

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = b \qquad (5)$$

la cual, a la vez, tiene el mismo conjunto solución que el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es:

$$[\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n \quad \boldsymbol{b}] \qquad (6)$$

El teorema anterior constituye una poderosa herramienta para comprender problemas de álgebra lineal, porque ahora un sistema de ecuaciones lineales puede verse en tres formas diferentes, pero equivalentes:

- como una ecuación matricial,
- como una ecuación vectorial o
- como un sistema de ecuaciones lineales.

Siempre que construyas un modelo matemático de un problema de la vida real, tendrás libertad para elegir qué punto de vista es más natural. Además, será posible pasar de una formulación del problema a otra, según sea conveniente. En cualquier caso, la ecuación matricial (4), la ecuación vectorial (5) y el sistema de ecuaciones se resuelven de la misma manera: por reducción de filas de la matriz aumentada (6).

3.5.4 Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

Teorema 20

El sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es compatible sí, y sólo sí, $\boldsymbol{b}$ está en el espacio de columnas de A o lo que es lo mismo, $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de las columnas de A

Demostración

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes, el vector columna de incógnitas y el vector columna de los términos independientes, respectivamente del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sí, y sólo sí, $\boldsymbol{b}$ es combinación lineal de las columnas de A**.** Es decir, el sistema es compatible sí, y sólo sí, $\boldsymbol{b}$ pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A.

Ejemplo 20. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ¿La ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es compatible para todos los valores de b_1, b_2, b_3?

Solución

Se reduce por filas la matriz aumentada para $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + 4b_1) \end{bmatrix}$$

La tercera entrada en la columna 4 es igual a $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3$.La ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no es compatible para toda $\boldsymbol{b}$ porque algunos valores de **b** pueden hacer que $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3$ sea distinto de cero.

Para que sea compatible se debe cumplir que $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0$.

♣

La ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ del ejemplo anterior no es compatible para todas las $\boldsymbol{b}$ porque la forma escalonada de A tiene una fila de ceros. Si A tuviera un pivote en las tres filas, no habría que preocuparse por los cálculos en la columna aumentada, ya que, en este caso, una forma escalonada de la matriz aumentada no tendría una fila como [0 0 0 1].

En el siguiente teorema, la frase "las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$" significa que *cada* $\boldsymbol{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de las columnas de A. En general, un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^m$ **genera** a $\mathbb{R}^m$ si cada vector de $\mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ es decir, si $gen\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_p\} = \mathbb{R}^m$.

Ejemplo 21. Considérese el sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes se reduce:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Procedemos de igual forma con la matriz ampliada:

$$[A \vdots \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz ampliada es 2, por tanto $\boldsymbol{b}$ está en el espacio de columnas de A y el sistema es compatible.

Teorema 21 Sea A una matriz de m x n. Entonces, los siguientes enunciados son lógicamente equivalentes. Es decir, para una A particular, todos los enunciados son verdaderos o todos son falsos.

a) Para cada $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^m$, la ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene una solución.

b) Cada **b** de $\mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de las columnas de A.
c) Las columnas de A generan $\mathbb{R}^m$.
d) A tiene una posición pivote en cada fila.

Advertencia: El teorema anterior se refiere a una *matriz* de *coeficientes*, no a una matriz aumentada. Si una matriz aumentada $[A \;\; \boldsymbol{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede o no ser compatible.

Resumen de condiciones equivalentes para matrices cuadradas

Si A es una matriz cuadrada de orden n, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es invertible
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única para cualquier matriz $\boldsymbol{b}$ de tamaño $n \; x \; 1$.
3. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ tiene sólo la solución trivial
4. A es equivalente por filas a la matriz identidad de orden n, I_n.
5. $|A| \neq 0$
6. $rango(A) = n$
7. Los n vectores fila de A son linealmente independientes.
8. Los n vectores columna de A son linealmente independientes.

3.6 Cambios de base

Sean $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ y $B' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ dos bases de un espacio vectorial V. Si

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = c_{11}\boldsymbol{u}_1 + c_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{v}_2 = c_{12}\boldsymbol{u}_1 + c_{22}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{n2}\boldsymbol{u}_n \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{v}_n = c_{1n}\boldsymbol{u}_1 + c_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{u}_n \end{cases}$$

entonces la matriz de cambio de B a B' es:

$$Q = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Demostración

Sea $\boldsymbol{v} = d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n$ un vector arbitrario de V. Su matriz de coordenadas en la base B es, por tanto:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Así pues:

$$Q[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \cdots + c_{1n}d_n \\ c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \cdots + c_{2n}d_n \\ \vdots \\ c_{n1}d_1 + c_{n2}d_2 + \cdots + c_{nn}d_n \end{bmatrix}$$

Por otra parte, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n \\ &= d_1(c_{11}\boldsymbol{u}_1 + c_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{u}_n) + \cdots + d_n(c_{1n}\boldsymbol{u}_1 + c_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{u}_n) \\ &= (d_1c_{11} + \cdots + d_nc_{1n})\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (d_1c_{n1} + \cdots + d_nc_{nn})\boldsymbol{u}_n \end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \cdots + c_{1n}d_n \\ c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \cdots + c_{2n}d_n \\ \vdots \\ c_{n1}d_1 + c_{n2}d_2 + \cdots + c_{nn}d_n \end{bmatrix}$$

Por tanto $Q[\boldsymbol{v}]_B = [\boldsymbol{v}]_{B'}$ y concluimos que Q es la matriz de cambio de B a B'.

Teorema 22

Inversa de la matriz de cambio de base.

Si P es la matriz de cambio de una base B' a otra base B de $\mathbb{R}^n$, P es invertible, y la matriz del cambio de B a B' viene dada por P^{-1}.

Demostración

Por lo demostrado anteriormente, sea Q la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces:

$[\boldsymbol{v}]_B = P[\boldsymbol{v}]_{B'}$ y $[\boldsymbol{v}]_{B'} = Q[\boldsymbol{v}]_B$

Lo cual implica que $[\boldsymbol{v}]_B = PQ[\boldsymbol{v}]_B$ para todo vector $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$. De ahí se sigue que $PQ = I_n$. En consecuencia P es invertible y $P^{-1} = Q$, la matriz de cambio de B a B'.

Teorema 23

Sean $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ y $B' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ dos bases de $\mathbb{R}^n$. La matriz de cambio de B a B' se puede hallar aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan a la matriz $[B' \vdots B]$ como sigue:

$$[B' \vdots B] \longrightarrow [I_n \vdots P^{-1}]$$

Demostración

Supongamos que:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = c_{11}\boldsymbol{u}_1 + c_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{v}_2 = c_{12}\boldsymbol{u}_1 + c_{22}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{n2}\boldsymbol{u}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n = c_{1n}\boldsymbol{u}_1 + c_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{u}_n \end{cases}$$

de modo que:

$$c_{1i}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{bmatrix} + c_{2i}\begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + c_{ni}\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{bmatrix} \quad para\ i = 1, 2, \dots, n$$

Esta ecuación vectorial da lugar, componente a componente, al sistema lineal:

$$\begin{matrix} v_{i1} = c_{1i}u_{11} + c_{2i}u_{21} + \cdots + c_{ni}u_{n1} \\ v_{i2} = c_{1i}u_{12} + c_{2i}u_{22} + \cdots + c_{ni}u_{n2} \\ \vdots \\ v_{in} = c_{1i}u_{1n} + c_{2i}u_{2n} + \cdots + c_{ni}u_{nn} \end{matrix} \quad para\ i = 1, 2, \dots, n$$

Como los n sistemas tienen la misma matriz de coeficientes los podemos reducir simultáneamente usando la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} & \vdots & v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} & \vdots & v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} & \vdots & v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, por lo demostrado anteriormente la parte derecha de esta matriz es $Q = P^{-1}$, luego la matriz tiene la forma:

$$[I_n \vdots P^{-1}]$$

lo cual demuestra el teorema.

Ejemplo 22. Hallar la matriz de cambio de base de B a B' para las bases de $\mathbb{R}^3$:

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,0,1), (0,-1,2), (2,3,-5)\}$

Solución

Con los vectores de las dos bases formamos las matrices B y B':

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Ahora construimos $[B' \vdots B]$ y usamos Gauss-Jordan para reescribirla como $[I \vdots P^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Por tanto la matriz de cambio de B a B' es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Si B es la base canónica, como en el ejemplo anterior, el proceso de transformar $[B' \vdots B]$ a $[I_n \vdots P^{-1}]$ se convierte en:

$$[B' \vdots I_n] \longrightarrow [I_n \vdots P^{-1}]$$

Pero este es el mismo proceso utilizado para calcular la inversa de la matriz B'. Es decir, si B es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, la matriz de transición de B a B' viene dada por:

$$P^{-1} = (B')^{-1}$$

El proceso es aún más simple si B' es la base canónica, ya que la matriz $[B' \vdots B]$ está ya en la forma

$$[I_n \vdots B] = [I_n \vdots P^{-1}]$$

En este caso la matriz de transición es simplemente:

$$P^{-1} = B$$

Ejemplo 23. Hallar la matriz de cambio de B a B' para las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$B = \{(-3,2),(4,-2)\}$$

$$B' = \{(-1,2),(2,-2)\}$$

Solución

Empezamos formando la matriz:

$$[B' \vdots B] = \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & \vdots & -3 & 4 \\ 2 & -2 & \vdots & 2 & -2 \end{array}\right]$$

y usamos el método de eliminación de Gauss-Jordan para obtener la matriz de cambio P^{-1} de B a B':

$$[I_2 \vdots P^{-1}] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \vdots & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Por tanto:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Podríamos calcular la matriz de cambio de B' a B obteniendo:

$$[B \vdots B'] = \left[\begin{array}{ccccc} -3 & 4 & \vdots & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \vdots & 2 & -2 \end{array}\right]$$

que se reduce a:

$$[I_2 \vdots P] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \vdots & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Por tanto la matriz de cambio de B' a B es:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar que esta matriz es la inversa de la matriz de cambio hallada anteriormente sin más que calcular el producto:

$$PP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$